分類空間のラベル付き位相的場の理論におけるホイッスル作用素の非自明性について (有限群のコホモロジー論とその周辺)

栗林, 勝彦

分類空間のラベル付き位相的場の理論におけるホイッスル作用素の非自明性について

信州大学・学術研究院理学系　栗林 勝彦

Katsuhiko Kuribayashi
Faculty of Science, Department of Mathematics
Shinshu University

1. はじめに

本稿は，プレプリント [K19] の概説である。ストリングトポロジーの歴史を概観し，Lie 群の分類空間に同伴する開閉ストリングトポロジーに現れる，重要なホイッスル・コボルディズム作用素の非自明性の証明を概説することを目的としている。

1990 年代後半，Chas-Sullivan [C-S] により，向きづけられた多様体 M の自由ループ空間 $LM := \mathrm{map}(S^1, M)$ のホモロジー $H_*(LM)$ 上に，積や余積をはじめ魅力的な代数構造が導入された。Cohen-Jones [C-J] によるこうした代数構造のホモトピー論的解釈を経て，ホモロジー $H_*(LM)$ には，2 次元位相的場の理論 (Topological quantum field theory (TQFT))[C-G] やホモロジー的共形場理論 (Homological conformal field theory (HCFT))[Go] 構造が付加され，豊かな分野，ストリングトポロジーが出現した。このストリングトポロジーはオービフォールド [L-U-X]，Lie 群の分類空間 [C-M, H-L]，Gorenstein 空間 [F-T], 可微分スタック [B-G-N-X] まで拡張され発展し続けている。

Gorenstein 空間 [F-H-T] は，多様体, Poincaré 双対空間や分類空間，Borel 構成を含む大きなクラスを与える。また可微分スタックは，オービフォールドや分類空間を統一的に扱える概念とも言える。Gorenstein 空間をもとに展開される導来ストリングトポロジーの概説として [栗林] をあげておく。

Table 1. ストリングトポロジー先行研究等概観／*は具体的計算結果を含む

\ ストリングトポロジー 付加構造 \	向付け可能 多様体	Lie 群の 分類空間	スタック (軌道体を含む)	Gorenstein 空間
ループ (余) 積	[C-S] ('99)	[C-M] ('08)	[B-G-N-X]	[F-T] [K-M-N]
位相的場の理論 開閉理論	[C-G] ('04) [T] [B-C-T]	本話題 [K19] [Gu] ('11)	('12) [L-U-X]('08)	今後の研究課題
B-V 代数構造 HCFT	[M]*('09) [Go] ('08)	[K-M]* [H-L] ('15)	[A]* 軌道体関連	??
de Rham, 有理ホモトピー論	[I]('18) [F-T] ('09)	[K-M]*	今後の研究課題	[N]* , [W]* [F-T]
計算ツールの開発	[C-J-Y] ('04)	[K-M]	今後の研究課題	[K-M-N2, K-M-N]*
導来圏における考察 Hochschild ホモロジー	[B-C-T] ('09) [K11]*	[K16]*	?? ??	[K-M-N] ('15)

論文 [C-S] からすでに 20 年が経過しようとしている。しかしながら，ストリングトポロジーに現れる作用素の具体的な計算が進んでいるとは言い難い。具体的計算を進めることで，見える世界があること，応用へとつながることは経験や歴史が教えてくれる。実際，Tamanoi [T] の結果は，多様体のストリングトポロジーが与える TQFT において，ジーナス 1 以上を持つ曲面に対応するコボルディズム作用素は

自明になるということを主張する。したがって，TQFT において本質的な作用素はペアオブパンツから得られるループ (余) 積のみとなってしまう。

プレプリント [K19] では，Chataur-Menichi [C-M] による分類空間のストリングトポロジーを拡張して得られる Guldberg [Gu] のラベル付き開閉 TQFT を考え，そこに現れるホイッスル作用素の具体的計算を行っている。結果として，ホイッスル作用素の非自明性が示される。後で見るように，ホイッスル作用素は TQFT の開理論と閉理論を結びつける作用素であるから，その非自明性はこの 2 つの理論が分離しないことを意味することになる。

主張 1.1. コンパクト連結 *Lie* 群 G の最大階数閉部分群からなる集合を $\mathcal{B}$ とする。このとき，$\mathcal{B}$ でラベル付けられた開閉 *TQFT* において，ホイッスル作用素は非自明である。

2. ラベル付き開閉位相的場の理論と主定理

まず，一般的なラベル付き 2 次元 TQFT を導入するために，集合 $\mathcal{S}$ によりラベル付けられた開閉コボルディズムの圏 $\mathsf{oc\text{-}Cobor}(\mathcal{S})$ を次のように定義する。対象は S^1 および端点が $\mathcal{S}$ の元によりラベル付けたれた区間 $I = [0, 1]$ の直和である。対象 Y_0 から Y_1 への射は 2 次元の向き付けられた曲面 (2 次元コボルディズム) の微分同相類である。その 2 次元コボルディズム次のような 3 つの部分からなる境界 $\partial\Sigma$ を持つものとする:

$$\partial\Sigma = Y_0 \cup Y_1 \cup \partial_{\mathrm{free}}\Sigma$$

以降，コボルディズム Σ が文脈から明確であるとき，Y_0 と Y_1 をそれぞれ，∂_{in} と ∂_{out} と表す。また，自由境界と呼ばれる境界部分 $\partial_{\mathrm{free}}\Sigma$ は，境界 ∂Y_0 と ∂Y_1 の 1 次元コボルディズムであり，∂Y_0 と ∂Y_1 のラベルと両立する $\mathcal{S}$ 上のラベルが付加されているものとする (詳細は [M-S] を参照)。 射の合成は，コボルディズムを境界で接着することで与えられる。ただし，ラベルは保つように接着することが要求される。

字数付きベクトル空間のなす圏を $\mathbb{K}$-Vect と表す。ただし，射は次数を保存するとは限らない線形写像である。このとき，モノイダル関手

$$\mu : (\mathsf{oc\text{-}Cobor}(\mathcal{S}), \coprod) \longrightarrow (\mathbb{K}\text{-}\mathsf{Vect}, \otimes)$$

を $\mathcal{S}$ により**ラベル付けられた 2 次元開閉位相的場の理論**という。ただし，$\coprod$ はコボルディズムの直和を表し，ラベル付けられた開閉コボルディズムの圏のモノイダル構造を定義している。以下 2 次元のコボルディズム Σ に対して関手 μ により定る線形写像を μ_Σ と表す。また，$(\Sigma, \{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{S}'})$ によりラベル付き自由境界の連結成分が $\{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{S}'}$ で与えられるコボルディズムを表す。ただし，$\mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}$ の部分集合である。

ここで，Guldberg による分類空間のラベル付き 2 次元開閉位相的場の理論を紹介する。コンパクト連結 Lie 群 G とその閉部分群からなる集合を $\mathcal{B}$ と表す。ラベル付きのコボルディズム $\Sigma := (\Sigma, \{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{B}'})$ に対して，空間 $\mathcal{M}(\Sigma)$ をプルバック図式

$$\begin{CD}
\mathcal{M}(\Sigma) @>>> \mathrm{map}(\Sigma, BG) \\
@VVV @VV{i^*}V \\
\prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BH) @>{B\iota_*}>> \prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BG),
\end{CD}$$

で定義する。ただし，$\iota : H \to G$ は包含写像，$i : \partial_{\mathrm{free}}\Sigma = \coprod_H \Sigma^H \to \Sigma$ は埋め込みを示している。以下，特異 (コ) ホモロジーの係数は体 $\mathbb{K}$(標数は断りがなければ任

意) であるとする。また，一次元のコボルディズム $\partial_{\rm in} = (\partial_{\rm in}, \{\Sigma^H \cap \partial_{\rm in}\}_{H\in\mathcal{B}'})$ に同様のプルバック構成を適用して，空間 $\mathcal{M}(\partial_{\rm in})$ を得る。プルバック構成の自然性から，包含写像 $in : \partial_{in} \to \Sigma$ は写像 $in^* : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathcal{M}(\partial_{in})$ を誘導する。次の命題はコボルディズム作用素を構成する上で本質的である。

命題 2.1. [Gu, Proposition 2.3.9] (i) 包含写像 in はファイブレーション $\mathcal{M}(\Sigma)_c \to \mathcal{M}(\Sigma) \stackrel{in^*}{\to} \mathcal{M}(\partial_{\rm in})$ を誘導し，そのファイバー $\mathcal{M}(\Sigma)_c$ は $\Omega BH \simeq H, G/H$ とあるファイブレーション $\Omega BH \to E \to G/H$ の全空間 E との積で与えられる。ただし，H はコボルディズム Σ のラベルである。
(ii) (i) におけるファイブレーションは向きづけ可能である。すなわち底空間の基本群のファイバーのホモロジーへの作用は自明である。

こうして，ファイブレーション $h := in^* : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathcal{M}(\partial\Sigma)$ に対して，ファイバーに沿う積分写像 $h_! : H_*(\mathcal{M}(\partial\Sigma)) \to H_{*+i}(\Sigma)$ が定義できる。その次数 i は $H_*(\mathcal{M}(\Sigma)_c)$ のトップ次数であることに注意する。次が [Gu] における主定理である。

定理 2.2. ([Gu, Theorem 1.2.3]) コンパクト連結 *Lie* 群 G とその連結閉部分群からなる集合 $\mathcal{B}$ を指定する。$\mathcal{B}$ 上ラベル付けられたコボルディズム Σ に対して，合成

$$\mu_\Sigma : H_*(\mathcal{M}(\partial_{in})) \xrightarrow{h_!} H_*(\mathcal{M}(\Sigma)) \xrightarrow{(out^*)_*} H_*(\mathcal{M}(\partial_{out}))$$

で定義される線形写像 (コボルディズム作用素と呼ばれる)μ_Σ はラベル付けられた *2* 次元開閉位相的場の理論を与える。特に，$\mu_{\Sigma_1\circ\Sigma_2} = \mu_{\Sigma_1} \circ \mu_{\Sigma_2}$ が成立する。

ここで，そしてこれ以降は TQFT に現れる符号 (determinants) 部分は無視する。すなわち，コボルディズム作用素の計算においては，non-zero 倍を無視して行うことになる。

ラベル付けられたホイッスル・コボルディズム $W = (W, \{W^H\})$ を考える。そのイン・バウンダリー $\partial_{\rm in}$ は $I = [a, b]$ であり，H でラベル付けられたアーク $W^H = {}_a\cap_b$ の端点がそれぞれ a と b である。アウト・バウンダリー $\partial_{\rm out}$ は円 S^1 である。W の自由境界は W_H のみであることに注意する。[K19] の主定理は次のように述べられる。

定理 2.3. ([K19, Theorem 1.1]) G をコンパクト連結 *Lie* 群，H を連結閉かつ最大階数部分群とし， G と H の整係数ホモロジーは p-トージョンを持たないとする。ただし p は体 $\mathbb{K}$ の標数である。このとき，ホイッスル・コボルディズム $W = (W, \{W^H\})$ 及び逆向きホイッスル・コボルディズム $(W^{\rm op}, \{(W^{\rm op})^H\})$ に同伴する作用素 μ_W と $\mu_{W^{\rm op}}$ は非自明である。さらに，$({\rm deg}(B\iota)^*(x_i), p) = 1$ $(i = 1, ..., l)$ が成り立つとき，合成作用素 $\mu_W \circ \mu_{W^{\rm op}} = \mu_{W\circ W^{\rm op}}$ も非自明である。ただし， $B\iota : BH \to BG$ は包含写像 $\iota : H \to G$ が誘導する分類空間の間の写像であり，$x_1, ..., x_l$ は $H^*(BG; \mathbb{K})$ の生成元である。

定理 2.3 の前半の仮定のもと，[K19, Remark 3.2 (ii)] の結果から，ホイッスル・コボルディズムの逆の合成に同伴する作用素 $\mu_{W^{\rm op}\circ W}$ は自明になる。

3. 定理 2.3 の証明の概略

定理 2.3 の証明の流れは，次の通りである。(i) コホモロジー上で双対作用素 $D\mu_W = (in^*)^!\circ(out^*)^*$ と $D\mu_{W^{\rm op}} = (out^*)^!\circ(in^*)^*$ を考察する。(ii) コホモロジー環 $H^*(\mathcal{M}(W))$, $H^*(\mathcal{M}(\partial_{\rm in}))$ と $H^*(\mathcal{M}(\partial_{\rm out}))$ を Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS)(例えば

[LS67] 参照) を用いて決定する。定理 2.3 の前半の仮定から，コホモロジー環 $H^*(BG)$ と $H^*(BH)$ は多項式環と同型になる。これにより，両側 Koszul 分解 ([B-S]) が E_2-項の計算で利用できる。また $(in^*)^*$ および $(out^*)^*$ の振る舞いをコホモロジー環の生成元を明確にすることで決定する。(iii) 命題 2.1 の証明から，ファイブレーション $h := in^* : \mathcal{M}(W) \to \mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}} W)$ と $k := out^* : \mathcal{M}(W^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}}(W^{\mathrm{op}}))$ のファイバーはそれぞれ，H と G/H になる。これから，それぞれのファイブレーションに関する Leray-Serre スペクトル系列 (LSSS) を考察することで，ファイバーに沿う積分写像 $h^!$ と $k^!$ の振る舞いを調べる。(iii) $D\mu_W$ と $D\mu_{W^{\mathrm{op}}}$ が非自明となる定義域の元を見つける。(iv) 合成 $D\mu_{W^{\mathrm{op}}} \circ D\mu_W$ を計算する。

以下，この章では，定理 2.3 に現れる，ホイッスル作用素 μ_W の非自明性の証明の概略を与える。結果として主張 1.1 が従う。定理前半の仮定から適切な生成元を用いて $H^*(BG) \cong \mathbb{K}[x_1, ..., x_l]$, $H^*(BH) \cong \mathbb{K}[u_1, ..., u_l]$ と表せる。次数 $\deg x_i$ と $\deg u_j$ はいずれも偶数であることに注意する。また，環準同型写像 $f : A \to M$, $g : A \to N$ を用いて，M と N を A-加群とみなすときの得られるトージョン積を $\mathrm{Tor}_A(M, N)_{f,g}$ と表す。まず，(i)(ii) を実行することで，下記の可換図式 (3.1) と (3.2) を得る。

(3.1)
$$
\begin{tikzcd}
H^*(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{out}})) \arrow[d, "k^*"'] & \mathrm{Tor}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, H^*(BG^{S^1})) =: A_1 \arrow[l, "\cong", "EM"'] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_\eta(\eta,(out^*)^*)"'] \\
H^*(\mathcal{M}(W)) & \mathrm{Tor}_{H^*(BG^{\cap})}(H^*(BH^{\cap}), H^*(BG^W)))_{(B\iota_*)^*, res^*} =: A_2 \arrow[l, "\cong", "EM"'] \\
H^*(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}})) \arrow[u, "h^*"] & \mathrm{Tor}_{H^*(BG^{\{a,b\}})}(H^*(BH^{\{a,b\}}), H^*(BG^{a\text{—}b})))_{(B\iota_*)^*, p^*} =: A_3 \arrow[l, "\cong", "EM"'] \arrow[u, "\mathrm{Tor}_{res^*}(res^*,res^*)"']
\end{tikzcd}
$$

ただし，η は単位写像, X^K は写像空間 $\mathrm{map}(K, X)$ を，また $\cap$ はアーク ${}_a\cap_b = W^H$ を意味する。具体的な計算により，どの EMSS も E_2-項で潰れ，さらに拡張問題が存在しない。すなわち代数として $\mathrm{Tot}E_2^{*,*} \cong$ (ターゲットのコホモロジー環) が成り立つ。上述の EM は，この同型射と Eilenberg-Moore 写像との合成である。

(3.2)
$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d] & \mathrm{Tor}_{H^*(BG^{\times 2})}(H^*(BG), H^*(BG^I)))_{\Delta^*, (\varepsilon_0 \times e_1)^*} \arrow[l, "\cong", "EM"'] \arrow[d] & H^*(BG) \otimes \wedge(y_1, ..., y_l) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "(B\iota)^* \otimes 1"] \\
A_2 \arrow[r, "\cong", "\mathrm{Tor}_{t^*}(t^*,1)"'] & \mathrm{Tor}_{H^*(BG)}(H^*(BH), H^*(BG^{S^1})))_{(B\iota_*)^*, (ev_0)^*} & H^*(BH) \otimes \wedge(y_1, ..., y_l) \arrow[l, "\cong"'] \\
A_3 \arrow[u] \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Tor}_{H^*(BG^{\times 2})}(H^*(BH^{\times 2}), H^*(BG^I)_{((B\iota_*)^*)^{\otimes 2}, res^*} \arrow[u, "\mathrm{Tor}_{\Delta^*}(\Delta^*,u^*)"] & \frac{H^*(BH) \otimes H^*(BH)}{((B\iota)^* x_i \otimes 1 - 1 \otimes (B\iota)^* x_i)}. \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, "\mathsf{m}"']
\end{tikzcd}
$$

ここで，m は $H^*(BH)$ 上の積から得られる写像である。

(iii) を実行する, すなわちファイバーに沿う積分写像 $h^!$ を計算するために,，ファイブレーション h から得られる LSSS $\{{}_{LS}E_r^{*,*}, d_r\}$ を考える。Smith の結果 [LS81, Lemma 3.4] から, $\mathsf{m}(\zeta_{ij}) = \frac{\partial (B\iota)^* x_i}{\partial u_j}$ をみたす元 ζ_{ij} in $H^*(BH) \otimes H^*(BH)$ が存在して，$H^*(BH) \otimes H^*(BH)$ 上で，

$$
(B\iota)^* x_i \otimes 1 - 1 \otimes (B\iota)^* x_i = \sum_{j=1}^{l} \zeta_{ij}(u_j \otimes 1 - 1 \otimes u_j)
$$

と表すことができる。また $H^*(\Omega BH) \cong H^*(H) \cong \wedge(z_1, ..., z_l)$ と表すとき，Eilenberg-Mac Lane 空間から得られる LSSS 系列との比較により，z_j は $u_j \otimes 1 - 1 \otimes u_j$ に転入的であることが示される。こうして，$w_i := \sum_j^l \zeta_{ij} z_j$ はパーマネントサイクルであることがわかる。さらに，上述 (3.1) と (3.2) の計算から，

$$\mathbb{K}\{w_1, ..., w_l\} \cong (Q\mathrm{Tot}E_\infty^{*,*})^{\mathrm{odd}} \cong (QH^*(\mathcal{M}(W)))^{\mathrm{odd}} \cong \mathbb{K}\{y_1, ..., y_l\}$$

が成立する。ただし，QA は環 A の非分解元がつくるベクトル空間を意味する。したがって，(3.2) における A_1 の代数構造から ${}_{LS}E_\infty^{*,\dim H}$ 上で，次を得る：

$$0 \neq y_1 \cdots y_l = w_1 \cdots w_l = \det(\zeta_{ij}) z_1 \cdots z_l.$$

さらに，ファイバーに沿う積分写像の定義から，

$$\mu_W(1 \otimes y_1 \cdots y_l) = h^! \circ k^*(1 \otimes y_1 \cdots y_l) = h^!(1 \otimes y_1 \cdots y_l) = h^!(\det(\zeta_{ij}) z_1 \cdots z_l) = \det(\zeta_{ik})$$

となり，定理の前半を得ることになる。

定理の後半は，$\mathsf{m}(\det(\zeta_{ik})) = \det(\mathsf{m}(\zeta_{ik})) = \det(\frac{\partial (B\iota)^* x_i}{\partial u_j})$ が等質空間 G/H の基本類となる ([LS82, Proposition 3]) ことから従う。

注意 3.1. 主定理 [K19, Thoerem 1.1] の応用として，[K19, Remark 3.2] ではホイッスルコボルディズムと他のコボルディズムとの合成 (接着) で得られるコボルディズム作用素の (非) 自明性が議論されている。

開理論に関しては，Guldberg [Gu] が最後の章で取り上げ，$G = SU(2)$ であり，ラベルとして極大トーラスを持つ場合に，具体的な計算を行っている。また定理と同様，ラベルの集合 $\mathcal{B}$ が Lie 群 G の最大階数部分群からなる場合は，[K19, Appendix A] で開理論のコボルディズム作用素の計算方法を述べている。

結果として，基礎体が $\mathbb{Q}$ である場合，分類空間のラベル付き開閉 TQFT は，等質空間 G/H $(H \in \mathcal{B})$ の基本類を指定することで具体的な計算が可能であるとこを，[K19, Assertion 4.2] は主張する。

定理の中の H が G の最大階数部分群でない場合，ホイッスルコボルディズム作用素や開理論の計算に関してはまだ不明な点が多い。

References

[A] Y. Asao, Loop homology of some global quotient orbifolds. Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), 613–633.

[B-S] P.F. Baum and L. Smith, The real cohomology of differentiable fibre bundles, Comm. Math. Helv. **42** (1967), 171–179.

[B-G-N-X] K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi and P. Xu, String topology for stacks, Astérisque (2012), no. 343, xiv+169.

[B-C-T] A.J. Blumberg, R.L. Cohen and C. Teleman, Open-closed field theories, string topology, and Hochschild homology, "Alpine perspectives on algebraic topology", edited by C. Ausoni, K. Hess, and J. Scherer, Contemp. Math., AMS, **502** (2009), 53–76.

[C-S] M. Chas and D. Sullivan, String topology, preprint (math.GT/0107187).

[C-M] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. **669** (2012), 1–45.

[C-G] R.L. Cohen and V. Godin, A polarized view of string topology, Topology, geometry and quantum field theory, 127-154, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[C-J] R.L. Cohen and J.D.S. Jones, A homotopy theoretic realization of string topology, Math. Ann. **324** (2002), 773–798.

[C-J-Y] R. L. Cohen, J. D. S. Jones and J. Yan, The loop homology algebra of spheres and projective spaces. (English summary) Categorical decomposition techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001), 77-92, Progr. Math., 215, Birkhäuser, Basel, 2004.

[F-H-T] Y. Félix, S. Halperin and J. -C. Thomas, Gorenstein spaces. Adv. in Math. **71** (1988), 92-112.

[F-T] Y. Félix and J.-C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. **345** (2009), 417-452.

[Go] V. Godin, Higher string topology operations, preprint `arXiv:0711.4859`.

[Gu] C. Guldberg, Labelled String Topology for Classifying Spaces of Compact Lie Groups: A 2-dimensional Homological Field Theory with D-branes, Thesis for the Master degree in Mathematics Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2011.

[H-L] R. Hepworth and A. Lahtinen, On string topology of classifying spaces, Adv. Math. **281** (2015), 394–507.

[I] K. Irie, A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains. Int. Math. Res. Not. IMRN **15** (2018), 4602–4674.

[K11] K. Kuribayashi, The Hochschild cohomology ring of the singular cochain algebra of a space, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble), **61** (2011), 1779–1805.

[K16] K. Kuribayashi, The ghost length and duality between chain and cochain type levels, Homology, Homotopy and Applications, **18** (2016), 107–132.

[K19] K. Kuribayashi, On the whistle cobordism operation in string topology of classifying spaces, preprint 2019 `arXiv:1903.0994`

[栗林] 栗林 勝彦, 導来ストリングトポロジー—スペクトル系列および空間の代数的モデルか らの考察—, 日本数学会‘ 数学 ’掲載予定

[K-M] K. Kuribayashi and L. Menichi, The BV-algebra in string topology of classifying spaces, to appear in Canadian Journal of Math.

[K-M-N2] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Behavior of the Eilenberg-Moore spectral sequence in derived string topology, Topology and its Applications, **164** (2014), 24-44.

[K-M-N] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Israel Journal of Mathematics, 209 (2015), 745–802.

[L-U-X] E. Lupercio, B. Uribe and M.A. Xicoténcatl, Orbifold string topology, Geom. Topol. **12** (2008), 2203–2247.

[M] L Menichi, String topology for spheres, Comment. Math. Helv. **84** (2009) 135–157.

[M-S] G.W. Moore and G. Segal, D-branes and K-theory in 2D topological field theory, preprint `hep-th/0609042`.

[N] T. Naito, Computational examples of rational string operations on Gorenstein spaces. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **22** (2015), 543–558.

[LS67] L. Smith, Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence. Trans. Amer. Math. Soc. **129**(1967), 58–93.

[LS81] L. Smith, On the characteristic zero cohomology of the free loop space, Amer. J. Math. **103** (1981), 887–910.

[LS82] L. Smith, A note on the realization of graded complete intersection algebras by the cohomology of a space, Quart. J. Math. Oxford (2), **33** (1982), 379–384.

[T] H. Tamanoi, Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations. J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 605-615.

[W] S. Wakatsuki, Description and triviality of the loop products and coproducts for rational Gorenstein spaces, preprint 2016 `arXiv:1612.03563`